ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

2ο ΘΕΜΑ

Έστω f ορισμένη σε σύνολο σημείων $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ και θα μάθουμε να βρίσκουμε βοπ της f στο P_n.

- Εάν $m \leq n+1 \Rightarrow p_n^*(x_i) = f(x_i)$ $i=1,2,\dots,m$ είναι το γνωστό πολυώνυμο παρεμβολής της f και τότε είναι βοπ της f στον P_n.
- Εάν $m \geq n+2$ τότε θα αναπτύξουμε παρακάτω την θεωρία μας.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω f ορισμένη στο X_m.

Το πολυώνυμο $p_n^* \in P_n$ είναι βοπ της f στο X_m ανν υπάρχει εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για τη συνάρτηση σφάλμα $e = f - p_n^*$, αποτελούμενο από $n+2$ σημεία του X_m.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Η βοπ p_n^* της f ορισμένης στο X_m, στον P_n είναι μοναδική.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΕΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ:

Έστω $p_n^*(X_{n+2}; x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ βοπ της f ορισμένης στο X_{n+2}, στον P_n. Εκ της θεωρίας των εναλλασσόμενων σημείων γνωρίζουμε:

$$e(x_i) = f(x_i) - p_n^*(x_{n+2}; x_i) = \lambda(-1)^i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_i) = \lambda(-1)^i + p_n^*(x_{n+2}; x_i), \quad \forall i = 1,2,\ldots,n+2$$

Εχουμε δηλαδή ένα $(n+2)\times(n+2)$ γραμμ. συστημα.

τετοιο ωστε $A \cdot \bar{a} = f$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ 1 & 1 & x_2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+2} & 1 & x_{n+2} & \ldots & x_{n+2}^n \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (REMEZ) ΕΝΑΛΛΑΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ:

Γενικώς η ευρεση της βοπ στο X_m αναγεται στην ευρεση ενός συνόλου $X_{m,i} \subseteq X_m$ αποτελουμενο από $n+2$ σημεία, το οποίο θα μας δίνει το μεγαλύτερο σφάλμα. Δηλ. όσο πιο μεγαλο είναι το n τόσο ευκολότερη είναι η προσεγγιση της f στο $[a,b]$.

το ονομάζουμε σύνολο αναφοράς.

Εστω λοιπόν $\{x_\sigma\} \subseteq X_m$, το οποίο έχει $n+2$ (αφου $m \geq n+2$). Επίσης, συμβολίζουμε με x_σ κάθε τιμή στο $\{x_\sigma\}$ (πχ $\sum_\sigma f(x_\sigma) = \sum_{i=1}^{n+2} f(x_i)$).

Ας είναι $P_\sigma = P_n^*(f; \{x_\sigma\})$ η βοπ της f στο $\{x_\sigma\}$ τότε το μεγιστο σφαλμα:

$$E_n(f; \{x_\sigma\}) = |f(x_\sigma) - P_\sigma(x_\sigma)| = \rho_\sigma$$

(Προσοχή στα συμβολα $P_\sigma \neq \rho_\sigma$.)

και έστω $M = \max_{x \in X_m} |\underbrace{f(x) - P_\sigma(x)}_{=e_\sigma(x)}| = |f(x_j) - P(x_j)|$

Δεχόμαστε ότι $E_n(f; \{x_\sigma\}) = \rho_\sigma = |\lambda|$

- Αν $M = \rho_\sigma$, τότε $\{X_\sigma\}$ εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για το X_m και συνεπώς P_σ είναι η ΒΟΠ για το X_m και τελειώνει ο αλγόριθμος

- Αν $M > \rho_\sigma$, τότε $X_j \notin \{X_\sigma\}$ (δηλ. P_σ όχι ΒΟΠ) και άρα θα αναζητήσουμε άλλο σύνολο αναφοράς $\{X_M\}$. Το $\{X_M\}$ θα αποτελείται <u>απο το X_j</u> (οπου ουσιαστικά θα αντικαταστήσει ένα σημείο του $\{X_\sigma\}$, αυτό που δημιουργεί το προβλημα) και από <u>ολα τα υπόλοιπα σημεία του αρχικου $\{X_\sigma\}$</u>. Η αντικατάσταση αυτή γίνεται με τετοιο τρόπο ώστε $e_\sigma(x) = f(x) - P_\sigma(x)$ να εξακολουθεί να εναλλασσει πρόσημο όταν το x σαρώνει το $\{X_M\}$

Υπάρχουν όμως απο εδώ δύο ακόμα υποπεριπτώσεις:

1) εάν X_j ενδιάμεσα στα σημεία του $\{X_\sigma\}$ τότε αφαιρούμε το διπλανό απο το X_j το οποίο θα έχει ίδιο προσημο με το $e_\sigma(x) = f(x) - P_\sigma(x)$.

2) Εαν X_j ακραίο σημείο του $\{X_\sigma\}$ τοτε αντικαθιστά το διπλανό του, εάν έχει το ίδιο πρόσημο αλλιώς αντικαθιστα το άλλο άκρο, εαν εχει διαφορετικο προσημο με το διπλανό του.

<u>Σχόλιο</u>

Ολη η παράπανω διαδικασία μας οδηγεί στο συμπέρασμα οτι $\rho_M > \rho_\sigma$, δηλαδή οτι το σφαλμα ξεκιναει απο ενα σημειο και ξεκινα να μεγαλώνει οσο εκτελείται ο αλγόριθμος

ΘΕΜΑ 2ο (Ιουνιος 2015)

Να βρεθεί η βοπ της $f \in X_5$, στον P_2 οπου

$X_5 = \{0,1,2,3,4\}$ και

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	1	-1	1	-1

Χρησιμοποιώντας τον αλγοριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας απο το $\{x_\sigma\} = \{0,1,2,3\}$.

ΛΥΣΗ

Για το δοθεν συνολο αναφοράς $\{x_\sigma\} = \{0,1,2,3\}$ υπολογίζουμε με τη μεθοδο προσδιοριστών συντελεστών τη βοπ της $f \in X_5$, στον P_2.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Με προς τα πίσω αντικαταστάσεις έχουμε:

$\alpha_2 = \frac{1}{4}$, $2\alpha_1 + 4\alpha_2 = -1 \Rightarrow 2\alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = -1$

$2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow 2\alpha_0 - 1 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 2\alpha_0 = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{7}{8}$

και $-\lambda + \alpha_0 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{8}$.

Άρα, $\bar{\alpha} = \left[\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, -1, \frac{1}{4}\right]^T$

Επομένως, $p_\sigma(x) = \frac{7}{8} - x + \frac{1}{4}x^2$.

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ:</u> $(e_\sigma(x) = f(x) - p_\sigma(x))$

- $e_\sigma(0) = 0 - \left(\frac{7}{8} - 0 + \frac{1}{4}\cdot 0\right) = -\frac{7}{8} \longrightarrow$ ΕΞΟΔΟΣ.
- $e_\sigma(1) = 1 - \left(\frac{7}{8} - 1 + \frac{1}{4}\cdot 1\right) = \frac{7}{8}$
- $e_\sigma(2) = -1 - \left(\frac{7}{8} - 2 + \frac{1}{4}\cdot 2\right) = -\frac{7}{8}$
- $e_\sigma(3) = 1 - \left(\frac{7}{8} - 3 + \frac{1}{4}\cdot 3\right) = \frac{7}{8}$.
- $e_\sigma(4) = -1 - \left(\frac{7}{8} - 4 + \frac{1}{4}\cdot 4\right) = -\frac{15}{8} \longleftarrow$ ΕΙΣΟΔΟΣ

Παρατηρούμε ότι: $M = \max_{x \in X_m} |e_\sigma(x)| = \frac{15}{8} > \rho_\sigma = \frac{7}{8}$

Εφόσον, το προηγούμενο από αυτό έχει διαφορετικό πρόσημο από το $e_\sigma(4)$ τότε βάσει αλγορίθμου του Remez θα βγάλουμε εκτός το $e_\sigma(0)$, δηλ. το άνω άκρο. Επομένως, μεταβαίνουμε στο νέο σύνολο αναφοράς $\{x_M\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν αυτό είναι το καλύτερο σύνολο όλων των πιθανών με ακριβώς την ίδια διαδικασία. Βρίσκουμε, τη νέα βοπ του $\{X_M\}=\{1,2,3,4\}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \dots \to \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, εδώ $p_M(x)=0$

και η κατάταξη των σφαλμάτων είναι:

$e_M(0) = 0 = f(0)$

$e_M(1) = 1 = f(1)$

$e_M(2) = -1 = f(2)$

$e_M(3) = 1 = f(3)$

$e_M(4) = -1 = f(4)$

Όπου $M = 1 = \lambda = \rho_M$

Άρα πράγματι το $\{X_M\}$ εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για το X_5 και άρα το $p_M(x)=0$ είναι η βοπ για το X_5.